



ریاضی و آمار یازدهم

درس ۱ : گزاره ها و ترکیب گزاره ها

حامد رحمانی

تعریف گزاره

در منطق ریاضی، هر جمله خبری را که بتوانیم به آن در حال یا آینده دقیقاً یکی از ارزش های درست یا نادرست (راست یا دروغ) را نسبت دهیم گزاره میگوییم.

p, q, s, r, \dots

~~پنجره اتاق را باز کن . امری~~

~~چه هوای دلپذیری ! احساسی~~

تعطیلات را چگونه گذرانندی ؟ پرسشی ✓

~~بهترین شهر برای زندگی تهران است .~~ خبری ✓

2^3 برابر ۸ می شود . خبری ✓

تعداد ستاره های کهکشان راه شیری ۱۰۰ میلیارد است . خبری ✓

~~بهترین تیم فوتبال ، منچستر سیتی است .~~ خبری ✓

تعداد گزاره = ۳ عدد

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

تعداد گزاره = ۲ عدد

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

تعداد گزاره = ۱ عدد

p
د
ن

جدول ارزش گزاره ها

P Q R

$P = ۲^۳$ برابر است

$۲^۲ = ۴$ سطر

$۲^۱ = ۲$ سطر

$۲^۳ = ۸$ سطر

تعداد گزاره = n

تعداد سطر ها (حالت ها) = ۲^n

$$P \rightarrow \sim P$$

(\sim) علامت نفی

نقیض یک گزاره

هر گزاره حتما دارای یک فعل است .
اگر فعل این گزاره را منفی کنیم به یک گزاره جدید می رسیم که به آن **نقیض گزاره** اولیه می گوئیم

جدول ارزش گذاری

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

$$\cancel{2x+4} > \cancel{2x+14}$$

$$- \wedge > 2x \xrightarrow{-2} -4 > x$$

$$\rightarrow \boxed{x < -4} \rightarrow x < -4 = \sim P$$

$$x > 2 \xrightarrow{\text{نقیض}} x \leq 2$$

نکته

عدد ۲، عددی زوج است . **نقیض** ← عدد ۲، عددی زوج نیست.

مثال: نقیض گزاره $2(x+3) > 4x+14$ کدام است؟

$$x < -4 \quad (2)$$

$$x \leq -4 \quad (1)$$

$$x > -4 \quad (4)$$

$$x \geq -4 \quad (3)$$

ترکیب گزاره‌ها

۴ روش ترکیب

- ۱- ترکیب عطفی
- ۲- ترکیب فصلی
- ۳- ترکیب یک شرطی
- ۴- ترکیب دو شرطی

گاهی اوقات گزاره ما، ترکیبی از دو یا چند گزاره است که به این آنها گزاره مرکب (ترکیبی) می‌گوییم.

مثال :

۵ عددی اول است و ۲۴ بر ۸ بخش پذیر است.

ارزش گزاره مرکب ???

گزاره‌های هم‌ارزش

اگر ارزش دو گزاره مثل هم باشد یا هر دو درست یا هر دو نادرست . به آن دو گزاره هم‌ارز می‌گوییم .

از نماد « \equiv » برای هم‌ارز بودن دو گزاره استفاده می‌کنیم .

$$P \equiv Q$$

گزاره p, q هم‌ارز هستند .

$$P \neq Q$$

گزاره p, q هم‌ارز نیستند .

ترکیب عطفی (∧)

اگر دو گزاره با لفظ " و " کنار هم باشند

$$(p \wedge q)$$

جدول ارزش گذاری

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال: عدد ۱۷ عددی اول است و تهران پایتخت ایران است.
 $p \wedge q (>) =$

مثال: ۱۷۹ عددی زوج است و صفر عددی صحیح است.
 $p \wedge q (N)$

مثال: $\sqrt{49} = \pm 7$ و $4 > \sqrt{20} > 5$
 $p \wedge q (N)$

ترکیب فصلی (v)

اگر دو گزاره با لفظ "یا" کنار هم باشند

$$p \vee q$$

جدول ارزش گذاری

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

$$p \vee q (>)$$

مثال: عدد ۱۷ عددی اول است یا تهران پایتخت ایران است.

$$p \vee q (>)$$

مثال: ۱۷۹ عددی زوج است یا صفر عددی صحیح است.

مثال: عدد 10^5 یک عدد ۵ رقمی است یا رابطه $\{(\sqrt{4}, 6), (3, 1), (2, 5)\}$ تابع است

$$p \vee q (n)$$

حل سوالات به کمک جدول ارزش گذاری

میخواهیم باهم ارزش گزاره مرکب روبرو را بررسی کنیم:

حقیقی \rightarrow

کلی \rightarrow

$$(p \wedge q) \vee \sim p$$

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee \sim p$
\wedge	\wedge	○	\wedge	\wedge
○	\wedge	\wedge	○	\wedge
\wedge	○	○	○	○
○	○	\wedge	○	\wedge

ترکیب شرطی

در برخی گزاره ها می گوئیم ،

- p آنگاه q
- p نتیجه می دهد q

آنگاه

$$p \Rightarrow q$$

به این گزاره ها **ترکیب شرطی** دو گزاره p, q میگوئیم .

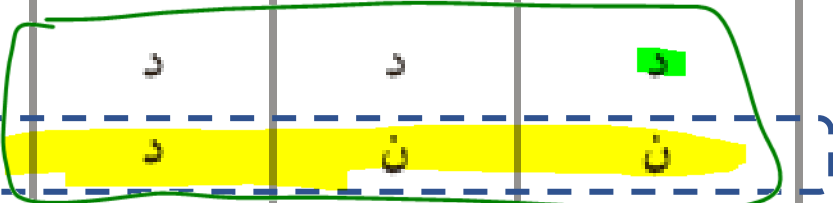
مثال: اگر ۲۹ عددی اول باشد آنگاه $5 > 4$ ()

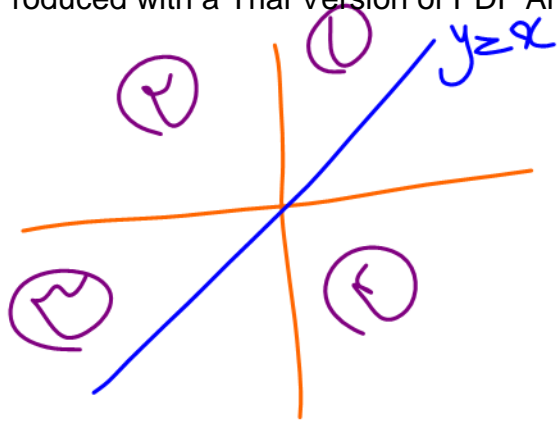
مثال: اگر نیویورک پایتخت ایران باشد آنگاه لاکپشت پرواز میکند

جدول ارزش گذاری

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

دنیای واقعی
دنیای استرایی





مثال : ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید .

A. اگر عددی زوج باشد ، آنگاه جز صحیح عدد $5/9$ عدد $5/9$ است .

()

B. اگر خط $y=x$ نیمساز ربع دوم و چهارم باشد آنگاه عدد 2501 عددی اول است

()

C. اگر گزاره $\sim p \Rightarrow q$ نادرست باشد ، ارزش کدام گزاره زیر نادرست است ؟

Handwritten logic notes:

- $\sim p \Rightarrow q$ (circled)
- $p \rightarrow \text{True}$
- $q \rightarrow \text{True} \rightarrow \sim q = \text{False}$

$p \Rightarrow q$
 $\text{True} \Rightarrow \text{True}$

()

$\sim q \Delta p$
 $\text{True} \Delta \text{True}$

()

$q \vee \sim p$
 $\text{True} \vee \text{False}$

()

$q \Rightarrow p$
 $\text{True} \Rightarrow \text{True}$

()

$$P \Rightarrow q \longrightarrow q \Rightarrow P$$

عکس گزاره شرطی / عکس نقیض گزاره شرطی

در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ اگر جای p, q را عوض کنیم به گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ میرسیم که به آن عکس گزاره شرطی می‌گوییم.

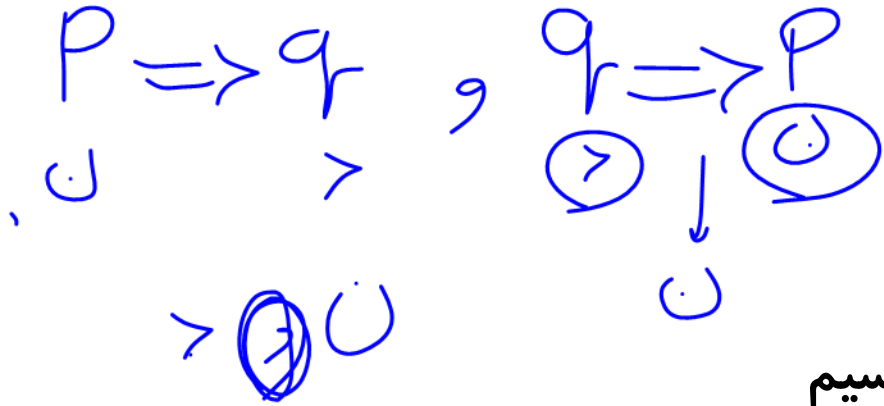
اگر ۳۲ عددی زوج باشد آنگاه هر ساعت از شبانه روز ۲۴ ساعت است.



اگر هر شبانه روز ۲۴ ساعت داشته باشد، آنگاه ۳۲ عددی زوج است.

اگر قبل از عوض کردن آنها را نقیض کنیم، می‌شود "عکس نقیض" گزاره شرطی

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$



ترکیب دو شرطی

اگر از گزاره p به نتیجه q برسیم و همچنین از گزاره q به نتیجه p برسیم آن را بصورت زیر نشان می دهیم و به آن گزاره دو شرطی p, q می گوئیم

$$p \Leftrightarrow q$$

جدول ارزش گذاری

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

- p اگر و تنها اگر q
- p نتیجه می دهد q را و q نتیجه می دهد p را
- P شرط لازم و کافی است برای q
- اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p

به این گزاره ها ترکیب دو شرطی دو گزاره p, q میگوئیم.

مثال:

اگر $\sqrt{144}$ عددی گنگ باشد و آنگاه نمودار تابع $y = |x| + 1$ از هر چهار ناحیه دستگاه مختصاتی عبور می کند و برعکس.



تکرار کتب درسی

مثال:

اگر گزاره $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \sim p)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

$p \rightarrow \sim p$

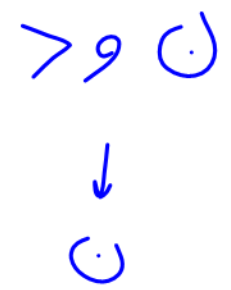
$(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ (4)

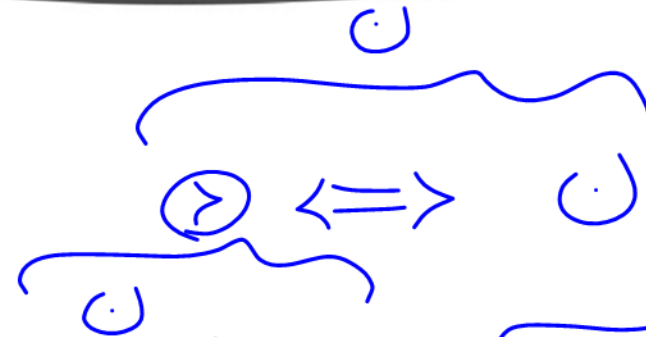
$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \sim p)$

$q \Leftrightarrow (p \wedge q)$ (3)

$q \Rightarrow \sim p$ (2)

$q \wedge \sim p$ (1)

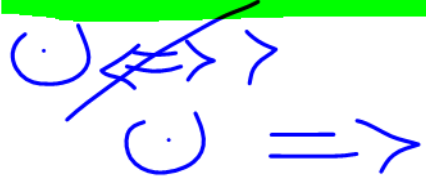




مثال:

$(r \Leftrightarrow \sim p) \Rightarrow q$

اگر گزاره $\sim (p \wedge \sim q)$ نادرست و گزاره ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $[(p \wedge \sim p) \Rightarrow p] \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$ کدام است؟



(۴) هم ارزش با نقیض r

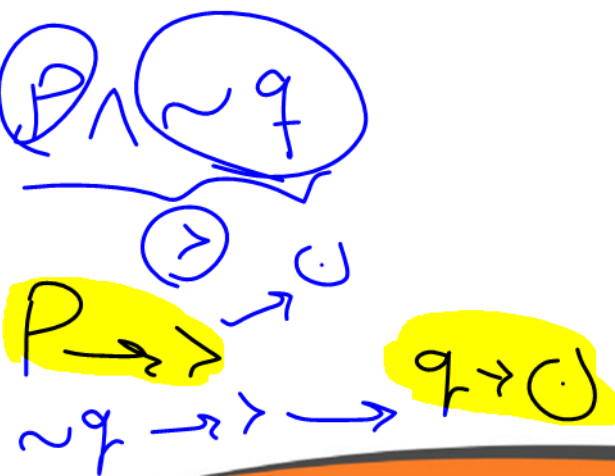
(۳) هم ارزش با r

(۲) همواره نادرست

(۱) همواره درست

۱ درست: $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p \Rightarrow q$

۲ نادرست: $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p \Rightarrow \sim q$



جبر گزاره ها

$$q \wedge p = p \wedge q$$

قانون جابجایی: فقط در گزاره فصلی و عطفی جای گزاره ها را میتوانیم عوض کنیم

قانون شرکت پذیری: به شرط بودن یک نوع علامت میتوانیم جای پرانتز را عوض کنیم

$$p \wedge (s \wedge q) = (p \wedge s) \wedge q$$

$$p \vee (s \vee q) = (p \vee s) \vee q$$

مثال:

گزاره زیر را ساده کنید.

$$p \vee (q \vee \sim p)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

به چشم جمع بهش نگاه کنین.

$$\boxed{1} \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

به چشم ضرب بهش نگاه کنین.

به چشم جمع بهش نگاه کنین.

$$\boxed{2} \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

به چشم ضرب بهش نگاه کنین.

قانون پخش :

$$\boxed{1} \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\boxed{2} \quad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

قوانین دمورگان :

$$\boxed{1} \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$\boxed{2} \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

قانون جذب :

مثال : حاصل هم ارزی $\sim (p \wedge \sim q) \wedge q$ کدام است ؟ p q $\sim p$ $\sim q$

تبدیل گزاره شرطی به فصلی : $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

تبدیل دو شرطی به دو تا یک شرطی : $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$