ریاضی یازدهم

فصل ۱ درس ۲

امیرحسین اژرکوی

درس دوّم : معادلات و توابع درجه ی دوّم

در این درس ابتدا با بحث های تکمیلی پیرامون معادله و تابع درجه‌ی ۲ و آشنا و سپس با معرفی نقطه‌ی ماکزیمم و مینیمم و مفهوم صفر تابع درجه‌ی دوّم، می توان بسیاری از مسائل ریاضیات را بررسی و حل کرد.

تجزیه

کلی ۵

ریشه مشترک

۱ ی د

قسمت اوّل : یادآوری معادله‌ی درجه‌ی ۲

در سال گذشته با معادله‌ی درجه‌ی ۲ آشنا شده اید. حتماً به یاد دارید که برای حل این معادله روش های متفاوتی وجود دارد. روش تجزیه و روش کلاسیک (کلی) را به خاطر دارید. بهتر است قبل از ورود به بحث این دو روش را در قالب مثال یادآوری کنیم.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

a b c

$$۲x^۲ + ۵x - ۳ = ۰$$

حل به روش تجزیه :

$$۲x^۲ + ۵x - ۳ = ۰ \to \frac{۱}{۲}(۲x - ۱)(۲x + ۶) = ۰ \to (۲x - ۱)(x + ۳) = ۰$$

$x = ۱/۲$ $x = -۳$

$$\to \begin{cases} ۲x - ۱ = ۰ \to x = \frac{۱}{۲} \\ x + ۳ = ۰ \to x = -۳ \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

حل به روش کلاسیک : $a = ۲$ و $b = ۵$ و $c = -۳$

$\Delta > 0 \to x_1, x_2$

$\Delta = 0$

$\Delta < 0 \;\; \times$

$$\boxed{\Delta = b^۲ - ۴ac} = (۵)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$ معادله دوریشه‌ی حقیقی دارد.

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(۵) + \sqrt{۴۹}}{۲(۲)} = \frac{-۵ + ۷}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حل به روش کلاسیک : $c=-۳$ و $b=۵$ و $a=۲$

معادله دوریشه‌ی حقیقی دارد. $\Delta=b^{۲}-۴ac=(۵)^{۲}-۴(۲)(-۳)=۲۵+۲۴=۴۹$

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۵)+\sqrt{۴۹}}{۲(۲)}=\frac{-۵+۷}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۵)-\sqrt{۴۹}}{۲(۲)}=\frac{-۵-۷}{۴}=\frac{-۱۲}{۴}=-۳$$

Δ

x_1 و x_2

شناسنامه معادله درجه ۲

یادآوری : هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ ، یک درجه‌ی دوّم است. یک روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم به صورت زیر است. این روش را روش کلی یا روش کلاسیک می نامند.

Δ

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم به این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱) با نوشتن معادله به صورت استاندارد ، ضرایب معادله یعنی c و b و a را مشخص می کنیم. (ضریب $x^{۲}$ را a، ضریب x را b و عدد ثابت را c می گیریم.)

۲) مبین معادله یعنی $\boxed{\Delta = b^{۲} - ۴ac}$ را محاسبه می کنیم.

۳) با توجه به علامت Δ تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_{۱} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \quad و \quad x_{۲} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف[1]) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x = \frac{-b}{۲a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \sqrt{\Delta} \to 0 \quad = \frac{-b}{2a} \to$$

رأس سهمی

قسمت دوّم : حل معادلات به روش تغییر متغیر

گاهی لازم می شود برای حل یک معادله از روش تغییر متغیر استفاده کرد. در این روش متغیر جدید را طوری در نظر می گیریم که روش حل معادله‌ی به دست آمده را می دانیم. با حل این معادله می توان ریشه های معادله‌ی اوّلیه را نیز به دست آورد.

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^{۴} - ۳x^{۲} - ۱۰ = ۰$$

حل : کافی است قرار دهیم، $x^{۲} = t$. لذا خواهیم داشت:

$$t^{۲} - ۳t - ۱۰ = ۰ \qquad a = ۱,\ b = -۳,\ c = -۱۰$$

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac$$

$$۹ - ۴(۱)(-۱۰) = ۴۹$$

$$x_{۱} = \frac{+۳ + \sqrt{۴۹}}{۲} = \frac{۳+۷}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$x_{۲} = \frac{۳-۷}{۲} = \frac{-۴}{۲} = -۲$$

$t = x^۲$

$t^۲ - ۳t - ۱۰ = ۰$

$(t - ۵)(t + ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} t = ۵ \rightarrow x^۲ = ۵ \rightarrow x = \pm\sqrt{۵} \\ t = -۲ \rightarrow x^۲ = -۲ \quad \text{ن} \end{cases}$

$۵ = x^۲$

$x = \pm\sqrt{۵}$

$x^۲ = -۲ \longrightarrow \times\times\times$

تمرین برای حل : معادله های زیر را حل کنید.

۲) $x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰$

$x^۲ = t$

$t^۲ - ۱۳t + ۳۶ = ۰$

$\Delta = ۱۶۹ - ۴(۱)(۳۶)$

۳) $(x^۲ - ۳)^۲ - ۳x^۲ + ۱۱ = ۰$

$x^۴ - ۶x^۲ + ۹ - ۳x^۲ + ۱۱$

$x^۴ - ۹x^۲ + ۲۰ = ۰$

۴) $\cancel{۴^x - ۱۲(۲^x) + ۳۲ = ۰}$

P S

قسمت سوّم : مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی درجه‌ی ۲ جمع

گاهی به جای تعیین مقدار ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ ، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه هـای آن اهمیت دارد. مجموع و حاصل ضرب ریشه های هر معادله‌ی درجه‌ی ۲ بـه شـکل $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه های زیر به دست می آید.

بدون Δ و بدون حل کردن معادله:

$$S = \frac{-b}{a}$$

$$P = \frac{c}{a}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها

حاصل جمع ریشه‌ها

$x^۲ - Sx + P = ۰$

که جمع شون

که ضربشون

$S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a}$ مجموع ریشه ها

$P = x_۱ \times x_۲ = \frac{c}{a}$ حاصل ضرب ریشه ها

تمرین۵ : بدون حل ~~معادله~~ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$۳x^۲ + ۵x - ۱ = ۰$ ← ✗ ۱ باشه

$a = ۳$
$b = ۵$
$c = -۱$

$x^۲ + \frac{۵}{۳}x - \frac{۱}{۳} = ۰$

$S = -\frac{۵}{۳}$

$S = \frac{-۵}{۳}$

$P = -\frac{۱}{۳}$

قسمت چهارم : تشکیل معادله‌ی درجه‌ی ۲

با معلوم بودن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ می توان آن معادله را تعیین کرد.

اگر S مجموع و P حاصل ضرب ریشه های این معادله باشند. می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$x^{2} - Sx + P = 0$$

جمع ریشه‌ها

ضرب ریشه‌ها

$x^2 - Sx + P = 0$

$a = 1$

$x_1 + x_2 = \cancel{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}$

تمرین برای حل :

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x_1 \cdot x_2 = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

۸ : معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $\sqrt{3} + 2$ و $2 - \sqrt{3}$ ریشه های آن باشند.

$x^2 - 22x + 1 = 0$

۹ : معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ریشه های آن باشند.

$ab = 6$

۱۰ : اندازه‌ی طول و عرض مستطیلی را به دست آورید که محیط آن ۱۱ سانتی متر و مساحت آن ۶ سانتی متر مربع باشد.

$2(a+b) = 11$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3+2-\cancel{2\sqrt{6}}+3+2+\cancel{2\sqrt{6}}}{3-2} = \frac{22}{1} = 22$$

مزدوج

$x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0 \rightarrow \boxed{2x^2 - 11x + 12 = 0}$

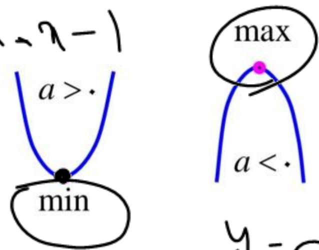
$a \neq 0 \longrightarrow$

مرور : اگر $a=0$ معادله خط خواهد بود.

در سال گذشته به یاد دارید که هر تابع درجه‌ی ۲ دارای معادله ای به صورت ($y = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$ است.) می باشد. نمودار چنین توابعی یک منحنی رو به بالا یا رو به پایین می باشد. این منحنی را سهمی می نامند. نمودار هر سهمی دارای بالاترین یا پایین ترین نقطه می باشد که آن را رأس سهمی می نامند.

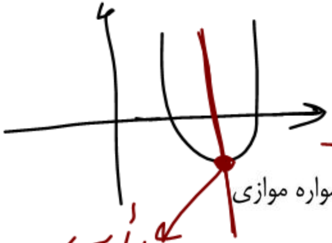
تقعر

مثال $y = 3x^2 - x - 1$



الف : اگر $a > 0$ باشد نمودار سهمی رو به بالا (دارای می نیمم) و اگر $a < 0$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین (دارای ماکزیمم)است.

$y = -3x^2 + x - 1$



$x = -b/2a$

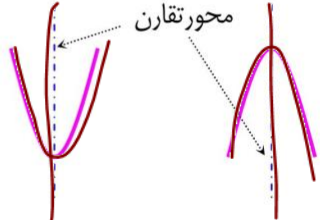
$y = x$

$x \to$ عرض

موازی محور عرض‌ها

ب : نمودار سهمی دارای یک محور تقارن است که معادله‌ی آن بصورت $x = \frac{-b}{2a}$ می باشد و همواره موازی محور y ها است.

معادله محور تقارن



همچنین معادله‌ی محور تقارن سهمی نیز بصورت $x = \frac{-b}{2a}$ می باشد.

برای رسم نمودار سهمی کافی است که علاوه بر رأس سهمی دو نقطه را چنان انتخاب کنیم که طـول یکـی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول رأس سهمی باشد.

$S=-\frac{b}{a}=x_1+x_2$

$P=\frac{c}{a}=x_1 \cdot x_2$

$-1+4-3$

مثال : نمودار سهمی به معادله‌ی $y=-x^2+4x-3$ را رسم کنید.

حل : ابتدا طول رأس سهمی را تعیین می کنیم.

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2(-1)}=2$$

$-4+8-3=4-3=1$

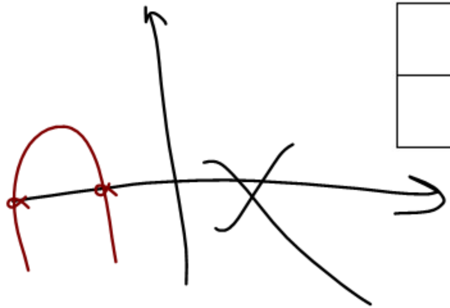
$-9+12-3$

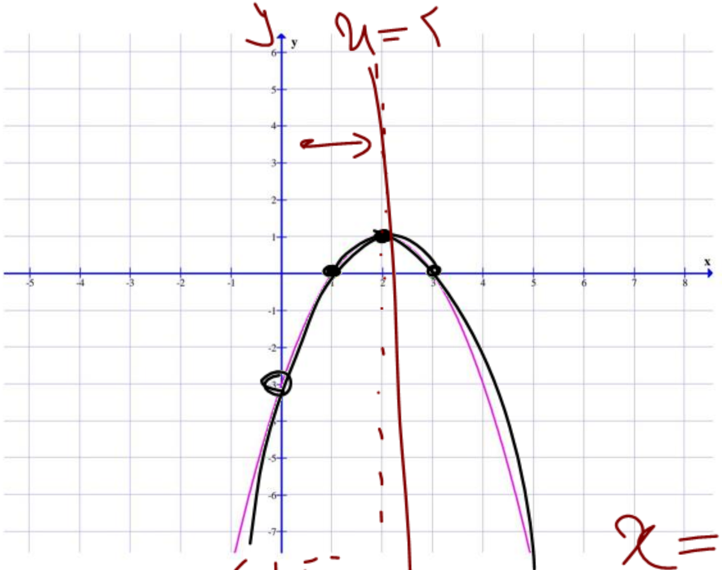
$3-3=0$

حل جدول زیر را تکمیل می کنیم.

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰

S, P





محور تقارن

$x = ۲$

$S \mid -\frac{b}{2a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

تمرین ۱۱: نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y = x^{2} - 2x - 3$

ب) $y = -(x-3)^{2} + 1$

$-x^2+6x-9+1 = -x^2+6x-8$

ج) $y = -4x^{2} + 8x + 1$

تمرین ۱۲: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^{2} + 2x + 3$ را در صورت وجود به دست آورید.

max

min

$S \mid -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$

$-\frac{\Delta}{4a}$

4

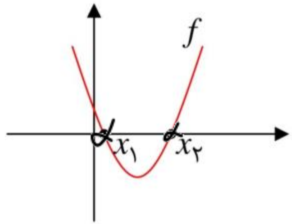
$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(-۱)} = ۱$$

همچنین بیشترین مقدار تابع به ازای $x = ۱$ می باشد.

$$f(۱) = -(۱)^۲ + ۲(۱) + ۳ = ۴$$

تذکر : در این تمرین نقطه‌ی $(۱,۴)$ رأس سهمی و مقدار ماکزیمم نمودار سهمی برابر ۴ می باشد.

همانطور که می دانیم ، نمودار هر تابع درجه‌ی ۲ ، یک سهمی است و دارای معادله ای به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ است.



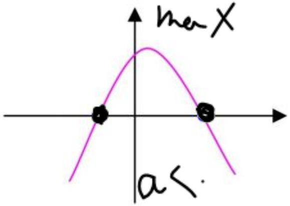
$$f(x_1)=f(x_2)=0$$

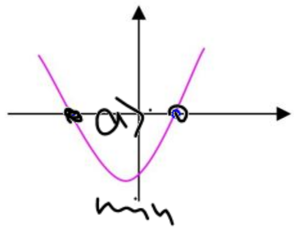
بنابراین ممکن است محور طول ها را در یک یا دو نقطه قطع کند و یا اینکه محور طولها را هیچ قطع نکند. طول نقطه‌ی تقاطع نمودار سهمی با محور طول ها را صفر تابع می نامند. بدیهی است که در این نقطه مقدار تابع (عرض نقطه) برابر صفر است. بنابر این ، صفر تابع f همان ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ است.

$f(x)=0$

$y=0$

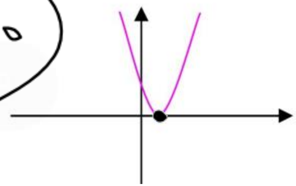
الف : نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع می کند. بنابراین معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.



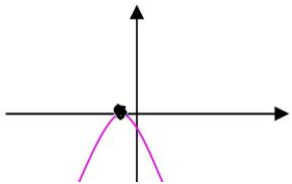


S , P

ب : نمودار سهمی بر محور طولها مماس است. بنـابراین معادلـه‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریـشه‌ی مضاعف است.



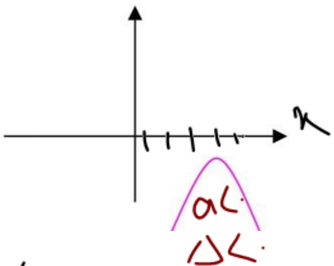
$\Delta = 0$



$a<0$ و $\Delta<0$

$a>0$ $\Delta<0$

ج : نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع نمی کند. بنابراین معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.



هر سال سوال کنکور: شکل داشت جواب ب / شرط نبود صفرت ج /

۱۹ : نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله‌ی $f(x)=0$

و علامت a و b و c را تعیین کنید.

$a<0$

$c>0$

$b<0$

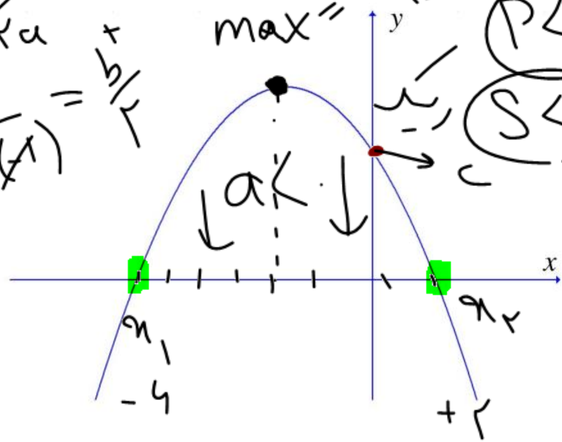
$-\frac{b}{2a}<0$, $\frac{+}{-}<0$

$+\frac{b}{2(-1)}=\frac{b}{2}$

$max=-\frac{b}{2a}$

تعداد ریشه‌ها = ۲ عدد

ریشه: $P<0$, $S<0$



آنالیز تابع

حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه‌ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله‌ی $f(x)=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به پایین است، لذا $a<0$

دو ریشه مختلف العلامه اند و قدر مطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بیشتر است. لذا مجموع ریشه ها منفی است. پس :

$$S<0 \to \frac{-b}{a}<0 \to \frac{b}{a}>0 \xrightarrow{a<0} b<0$$

چون دو ریشه مختلف العلامه اند. لذا حاصل ضرب آنها منفی است. پس :

$$P<0 \to \frac{c}{a}<0 \xrightarrow{a<0} c>0$$

۲۰ : نمودار زیر، نمودار تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله‌ی $f(x)=0$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.

$a>0$

$b<0$

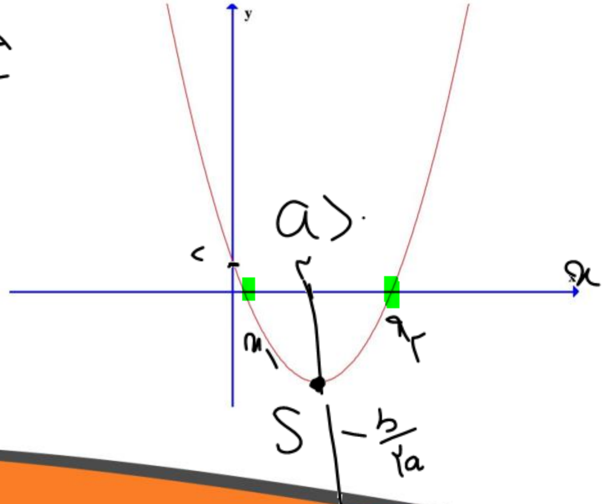
$c>0$

$-\frac{b}{2a}>0$

$f(x)=0 \rightarrow x_1 , x_2$

$P>0$

$S>0$



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه‌ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله‌ی $f(x)=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به بالا است، لذا $a>0$

دو ریشه هم علامت و مثبت می باشند. لذا مجموع آنها مثبت است. پس

$$S>0 \rightarrow \frac{-b}{a}>0 \rightarrow \frac{b}{a}<0 \xrightarrow{a>0} b<0$$

چون دو ریشه مثبت هستند، لذا حاصل ضرب آنها نیز مثبت است. پس

$$P>0 \rightarrow \frac{c}{a}>0 \xrightarrow{a>0} c>0$$