حسابان دو

فصل ۱ درس ۲

امیرحسین اژرکوی

درس دوّم : تابع درجه۳ ، توابع یکنوا و تقسیم و بخش پذیری

در این درس ابتدا با توابع چند جمله ای، بویژه تابع درجه‌ی۳ آشنا می شویم. سپس به معرفی توابع یکنوا می پردازیم و در نهایت تقسیم چندجمله ای ها و ویژگی های آن و همچنین بخش پذیری دو چندجمله ای را معرفی می کنیم.

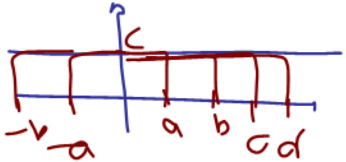
قسمت اوّل : توابع چند جمله ای و تابع درجه۳

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و $a_۰$ و $a_۱$ و $a_۲$ و ... و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq ۰$. در این صورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله‌ای** از درجه‌ی n می نامند.

3 4 5

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + a_{n-۲} x^{n-۲} + ... + a_۲ x^۲ + a_۱ x + a_۰$$

عرض از مبدأ

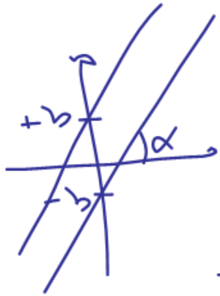


$f(x)=c$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

الف) تابع ثابت

$f(x)=c$ تابع چندجمله ای از درجه صفر[1]



ب) تابع خطی معادله خط سال نهم

$f(x)=ax+b$ تابع چندجمله ای از درجه یک

$\tan\alpha$

ج) تابع درجه۲(سهمی)

$\boxed{f(x)=ax^2+bx+c}$ S, P, Δ تابع چندجمله ای از درجه دو

د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ تابع چندجمله ای از درجه سه

استاندارد

تمرین ۱ : تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر چندجمله ای است. درجه‌ی توابع چندجمله ای را نیز مشخص کنید.

درجه ۲

الف) $f(x) = (x-۱)^۲ + ۳$

ب) $f(x) = \dfrac{۲x-۳}{x^۲ + ۵x - ۱}$ کسری

پ) $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۵x + ۱}$ رادیکالی

ت) $f(x) = |x-۲|$ قدرمطلق

ث) $f(x) = x(۲+x)(۲-x) + ۱$ چندجمله‌ای

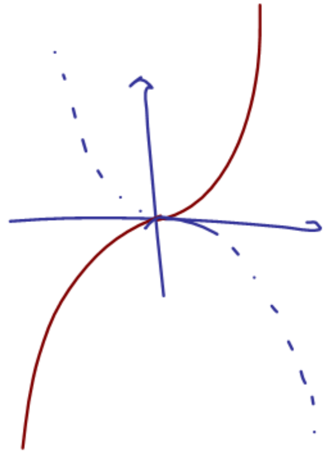
ج) $f(x) = \sin x$ مثلثاتی

ساده ترین تابع چندجمله ای درجه‌ی۳ به صورت زیر است.

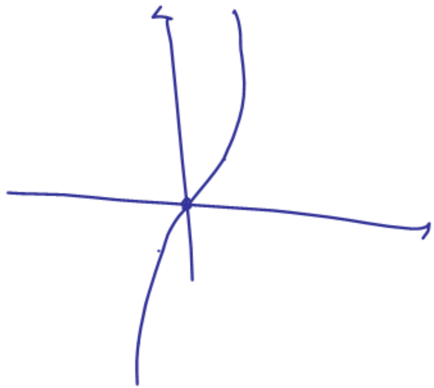
$$f(x) = x^۳$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.

x	۲−	۱−	۰	۱	۲
y	۸−	۱−	۰	۱	۸



$f(x) = x^۳$



$f^{-1}_{(x)} = \sqrt[3]{x}$

$-۸ \to -۲$

$x^3 \to \sqrt[3]{x}$

$x \to ۲$

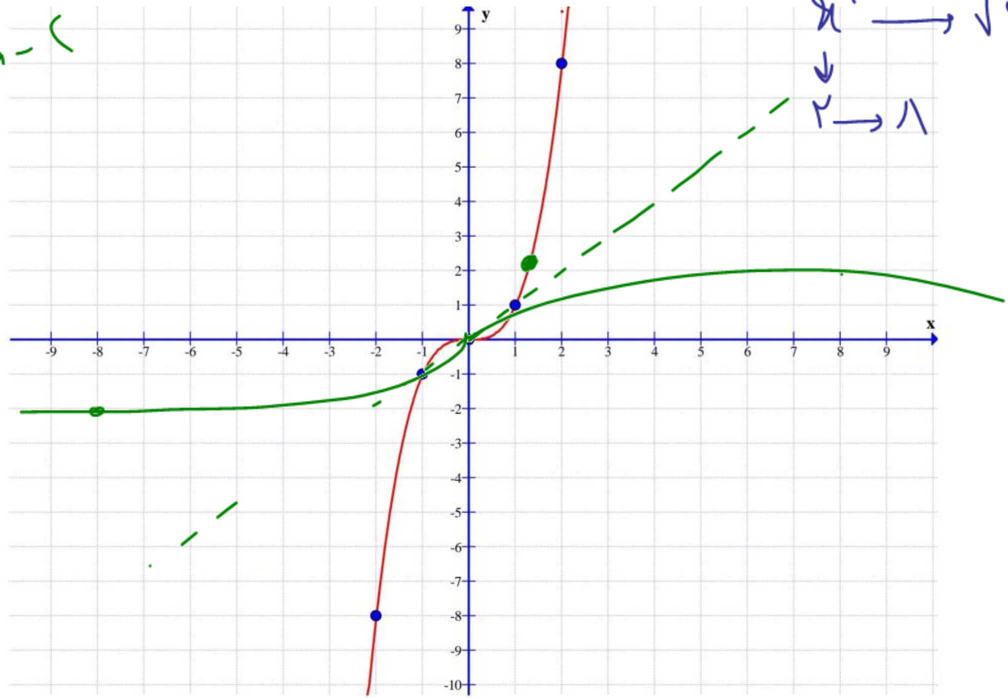
$۲ \to ۸$

$f_{(x)} = x^3$

$y = x^3$

$\sqrt[3]{y} = x$

$f^{-1}_{(x)} = \sqrt[3]{x}$



تابع یک به یک

با حفظ مساوی x

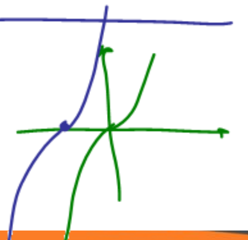
تمرین۲ : به دو طریق نشان دهید که تابع $f(x)=x^{3}$ وارون پذیر است سپس وارون آن را تعیین کنید.

تمرین۳ : به کمک رسم نمودار تابع $f(x)=x^{3}$ و با استفاده از تبدیلات، نمودار هر یک از توابع زیـر را رسم کنید.

الف) $f(x)=(x+1)^{3}$

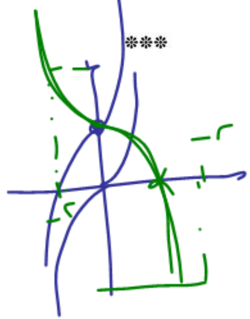
x^3+1+3x^2+3x

x^3+3x^2+3x+1



ب) $f(x)=-x^{3}+1$

***

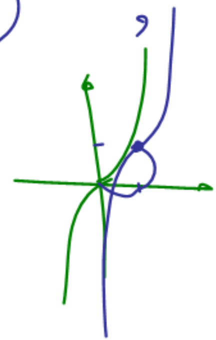


ج) $f(x)=x^{3}-3x^{2}+3x$

$(x-1)^3+1$

x^3-1-3x^2+3x

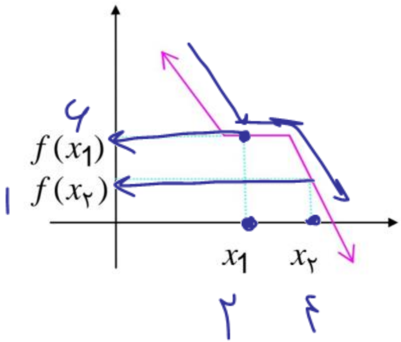
x^3-3x^2+3x-1



قسمت دوّم : توابع یکنوا

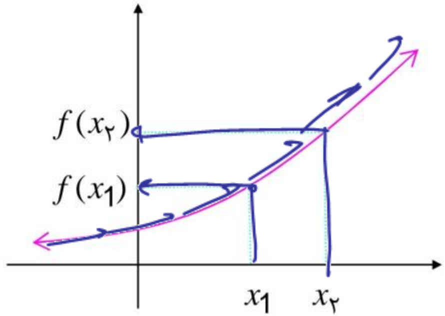
تابع $y = f(x)$ را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \; ; \; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



$\forall: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

اکیداً صعودی

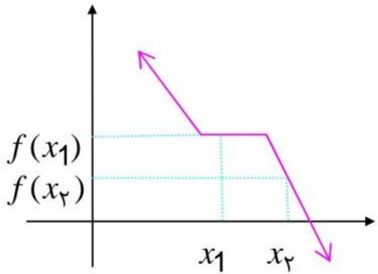


تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \,;\, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه :

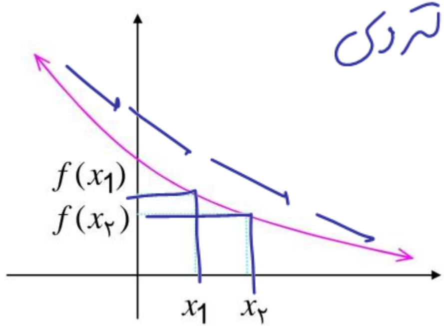
$$\forall x_1, x_2 \in D_f \,; x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$$



تابع $y = f(x)$ را روی دامنه اش نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند، هرگاه :

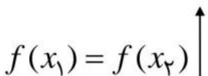
$$\forall x_1, x_2 \in D_f \; ; \boxed{x_1 < x_2} \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

نزولی اکید = اکیداً نزولی



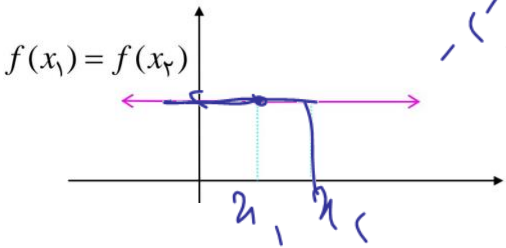
تابع $y = f(x)$ را روی دامنه اش ثابت است، هرگاه :

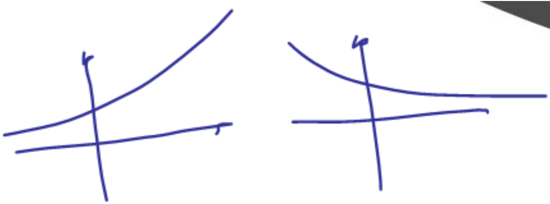
$$\forall x_1, x_2 \in D_f \; ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$



تابع $y = f(x)$ را روی دامنه اش ثابت است، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \,;\, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$





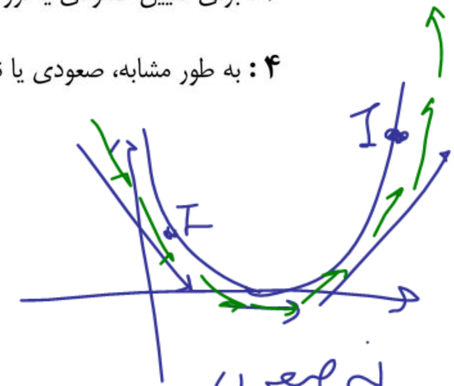
۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع اکیداً یکنوا می نامند.

۲ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است ولی یکنوا نیست.

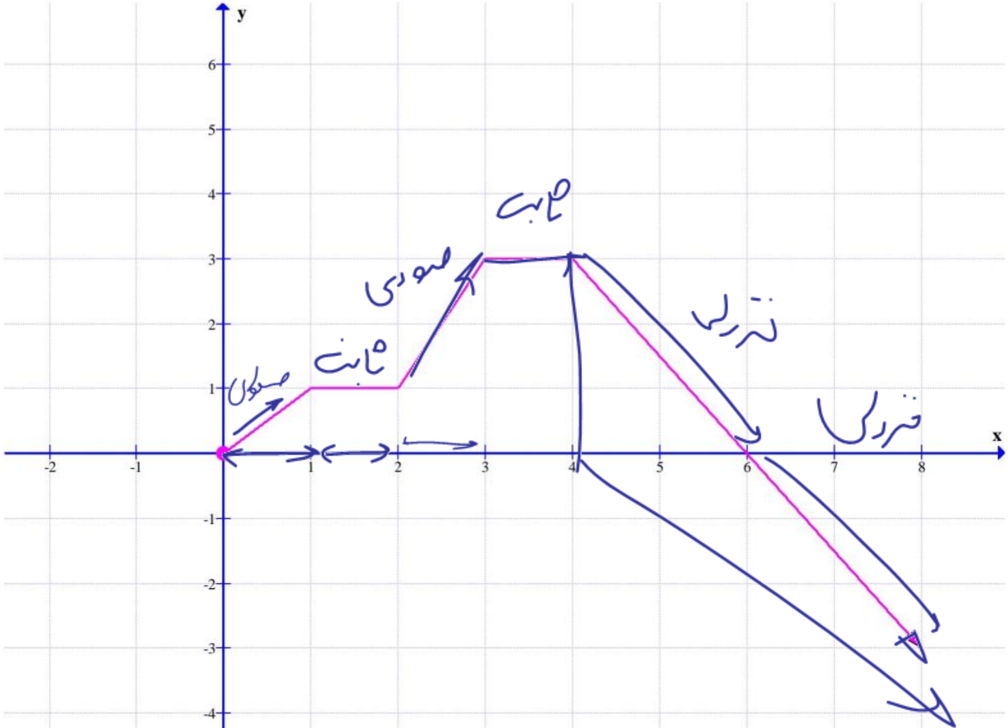
۳ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

۴ : به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ تعریف نمود.

هم صعودی هم نزولی

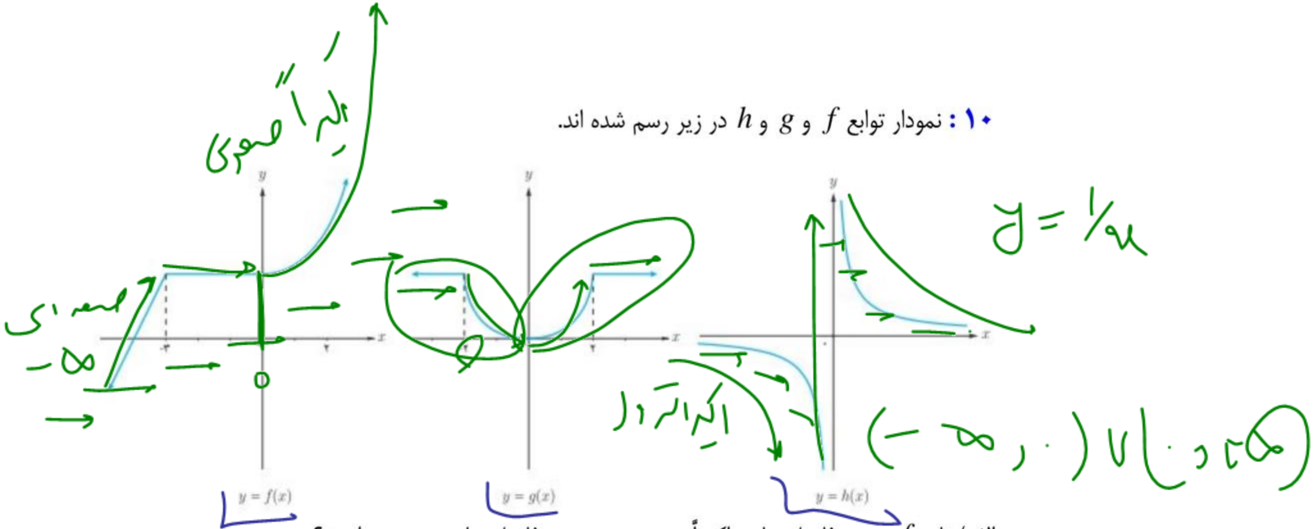


نه صعودی
نه نزولی



y
x
صعودی
ثابت
صعودی
ثابت
نزولی
نزولی

۱۰ : نمودار توابع f و g و h در زیر رسم شده اند.



الف) تابع f در چه فاصله هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله هایی نزولی است؟

ج) تابع h در چه فاصله هایی اکیداً نزولی است؟

مقسوم ۱۸ | ۲ مقسوم علیه

-۱۸ | ۹ خارج قسمت

۰۰ باقیمانده

۹×۲ + باقی = مقسوم

قسمت سوّم : تقسیم چندجمله ای ها و بخش پذیری

در سال های گذشته با تقسیم چندجمله ای ها بر یکدیگر آشنا شده اید. می دانید که برای تقسیم چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای غیر صفر $B(x)$ که درجه‌ی $A(x)$ بزرگتر یا مساوی درجه‌ی $\boxed{B(x)}$ باشد، مراحل زیر به ترتیب را طی می کنیم.

مقسوم	مقسوم علیه
$A(x)$	$B(x)$
...	$Q(x)$ خارج قسمت
$R(x)$ باقی مانده	

$\text{Deg}\,A(x) \geq \text{Deg}\,B(x)$

۳ → ۲ ← ۱

استاندارد ← نزولی کردن توان تابع

مرحله‌ی اوّل : ابتدا چند جمله ای های مقسوم ($A(x)$) و مقسوم علیه ($B(x)$) را استاندارد می کنیم.

مرحله‌ی دوّم : اوّلین جمله‌ی مقسوم را بر اوّلین جمله‌ی مقسوم علیه تقسیم می کنیم (جملاتی از مقسوم و مقسوم علیه که دارای بزرگترین توانها هستند.) و حاصل را به عنوان اوّلین جمله‌ی خارج قسمت قرار می دهیم.

مرحله‌ی سوّم : خارج قسمت بدست آمده را در چند جمله ای مقسوم علیه ضرب می کنیم. سپس عبارت بدست آمده را قرینه کرده و در زیر مقسوم یادداشت می کنیم. حاصل جمع این عبارت با مقسوم، اوّلین باقی مانده را نتیجه می دهد.

قرینه

مرحله‌ی چهارم: مانند مرحله‌ی دوّم ، این بار باقی مانده‌ی به دست آمده را بر عبارت مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

توجه : مراحل فوق را تا زمانی ادامه می دهیم که باقی مانده یا صفر شود و یا درجه‌ی چندجمله ای باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر شود.

مثال : تقسیم زیر را انجام دهید.

$$(-۳x^{۲}+۳x^{۳}+x^{۵}+۳x-۵)\div(۱+x^{۲})$$

$-۳x^۲ + ۳x^۳ + x^۵ + ۳x - ۵ \;\Big|\; ۱ + x^۲$

٤ ۴

۹

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^۵} + ۳x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۵ & x^۲ + ۱ \\ \hline
-\cancel{x^۵} - x^۳ & x^۳ + ۲x - ۳ \\ \hline
\cancel{۲x^۳} - ۳x^۲ + ۳x - ۵ & \\
-\cancel{۲x^۳} - ۲x & \\ \hline
-\cancel{۳x^۲} + x - ۵ & \\
+\cancel{۳x^۲} + ۳ & \\ \hline
x - ۲ &
\end{array}$$

خ

$۱ < ۲$

ب

تمرین۱۸ : مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم x^3+kx^2+2 بر $x-2$ برابر ۶ شود.

$$\begin{array}{r|l} x^3+kx^2+2 & x-2 \\ \hline -x^3+2x^2 & x^2+(2+k)x+4(2+k) \\ (2+k)x^2+2 & \\ -(2+k)x^2+2(2+k)x & \\ \hline 2(2+k)x+2 & \\ -2(2+k)x+4(2+k) & \\ \hline 4(2+k)+2 & \end{array}$$

$8+4k+2=6 \longrightarrow 4k=-4$

$k=-1$

قضیه‌ی تقسیم

اگر چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ا ی غیر صفر $B(x)$ تقسیم کنیم، در این صورت همواره خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

$A(x)=Q(x)\times B(x)+R(x)$

$\deg(R(x))<\deg(B(x))$

درجه

مثال : تقسیم زیر را انجام داده و درستی عمل را بررسی کنید.

$$(-x^{۳}+x^{۲}+۶x+۱)\div(۲+x)$$

حل:

$$\begin{array}{l|l} -\cancel{x^3}+x^2+6x+1 & x+2 \\ \cancel{+x^3}+2x^2 & -x^2+3x \\ \hline \cancel{3x^2}+\cancel{6x}+1 & \\ \cancel{-3x^2}-6x & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\deg 1 < \deg(x+2)$

$$(-x^2+3x)(x+2)+1=-x^3+x^2+6x+1$$

$$-x^3-2x^2+3x^2+6x+1$$

رابطه‌ی تقسیم (امتحان درستی عمل تقسیم)

$$(-x^{۲}+۳x)(x+۲)+۱=-x^{۳}-۲x^{۲}+۳x^{۲}+۶x+۱=-x^{۳}+x^{۲}+۶x+۱$$

کنکور

تمرین۱۹: مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم x^2+kx+1 بر $x+1$ برابر ۵ شود.

$$x^2+kx+1 \;\Big|\; x+1$$
$$-x^2-x \qquad x+k-1$$
$$(k-1)x+1$$
$$-(k-1)x-k+1$$
$$-k+2=5$$
$$-k=3 \rightarrow k=-3$$

تمرین ۲۰ : مقدار k را چنان بیابید که ~~چندجمله ای های~~ kx^3+2x^2-x ~~و x^2-4x+2~~ در تقسیم بر $x+1$ ~~هم باقی مانده شوند.~~ ۹ شود

$$3x^2-4x+2 \;\Big|\; x+1$$
$$-3x^2-3x \qquad 3x-7$$
$$-7x+2$$
$$7x+7$$
$$9$$

بخش پذیری در چند جمله ای ها

چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای $B(x)$ بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ صفر شود. در این صورت خواهیم داشت :

$$\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \hline \dots & Q(x) \\ \overline{R(x)} & \end{array}$$

$$A(x)=Q(x)\times B(x) + 0$$

$$\deg R(x) < \deg B(x) \rightarrow \boxed{R(x)=0}$$

$$18 \;\Big|\; 2 \qquad -18 \qquad 9$$

تمرین ۲۱ : نشان دهید که $3x^4+5x^3+6x^2-5+7x$ بر $3x+5$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x - 5 & 3x + 5 \\ \hline -3x^4 - 5x^3 & x^3 + 2x - 1 \\ \quad 6x^2 + 7x - 5 & \\ -6x^2 - 10x & \\ \quad -3x - 5 & \\ +3x + 5 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$$\frac{3x^4}{3x} = x^3$$

$$\deg R(x) < \deg B(x)$$

$$\Rightarrow R(x) = 0$$

تمرین ۲۱ : نشان دهید که $۳x^۴ + ۵x^۳ + ۶x^۲ - ۵ + ۷x$ بر $۳x + ۵$ بخش پذیر است.

تمرین ۲۲ : نشان دهید که عبارت $۴x^۵ - ۳x^۲ + x - ۲$ بر $x - ۱$ بخش پذیر است.

تمرین ۲۳ : مقدار k را طوری بیابید که $۴x^۲ + kx + ۲$ بر $x + ۱$ بخش پذیر شود.

$$\begin{array}{l|l} 4x^2 + kx + 2 & x + 1 \\ \hline -4x^2 - 4x & 4x + k - 4 \\ (k-4)x + 2 & \\ -(k-4)x - k + 4 & \end{array}$$

$$R(x) = 0$$

$$\Rightarrow -k + 6 = 0 \rightarrow k = 6$$

$$۳x^۲-۵x+۴ \;\Big|\; x-۱$$
$$-۳x^۲+۳x \qquad ۳x-۲$$
$$-۲x+۴$$
$$+۲x-۲$$
$$۲$$

نکات تکمیلی تقسیم

اگر چند جمله ای $P(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \hline \dots & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

$$P(x) = Q(x)\times(x-a)+R(x)$$

حال اگر قرار دهیم $x=a$

$$\Rightarrow P(a)=Q(a)\times\underbrace{(a-a)}_{۰}+R(a)\rightarrow \boxed{P(a)=R(a)}$$

$$x^۲+۲x+۱ \;\Big|\; x+۱$$
$$(-۱)^۲+۲(-۱)+۱$$
صفر
۰

یعنی باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر $P(a)$ است.

تمرین ۲۴ : باقی مانده‌ی تقسیم $۳x^۲-۵x+۴$ بر $x-۱$ را حساب کنید.

$$۳(۱)^۲-۵(۱)+۴$$
$$۳-۵+۴=-۲+۴=۲$$

تمرین ۲۵ : باقی مانده‌ی تقسیم $۲x^۸-۵x^۲+x+۳$ بر $x+۱$ را حساب کنید.

$$۲(-۱)^۸-۵(-۱)^۲+(-۱)+۳$$
$$\cancel{۲}-۵-۱+\cancel{۳}=-۱$$

تمرین ۲۶ : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ را حساب کنید. $(a\neq ۰)$

$P(-b)$