حسابان دو

فصل اول درس یک

امیرحسین اژرکوی

www.barandehsaz.com

درس اوّل : تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار بسیاری از توابع می توان از تبدیلات استفاده کرد. در واقع بـه کمـک تبـدیلات مـی تـوان نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابعی ساده تر از آن رسم نمود. در اینجا برخی از این تبـدیلات را معرفـی می کنیم.

الف : انتقال های افقی و عمودی

قسمت اوّل : انتقال عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ , y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می تـوان انتقال عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اوّل : تابع g به صورت $g(x) = f(x) + k$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(x_\circ) = f(x_\circ) + k = y_\circ + k$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ + k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار f است.

حالت دوّم : تابع g به صورت $g(x) = f(x) - k$ تعریف شده باشد.آنگاه

$$g(x_\circ) = f(x_\circ) - k = y_\circ - k$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ - k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار f است.

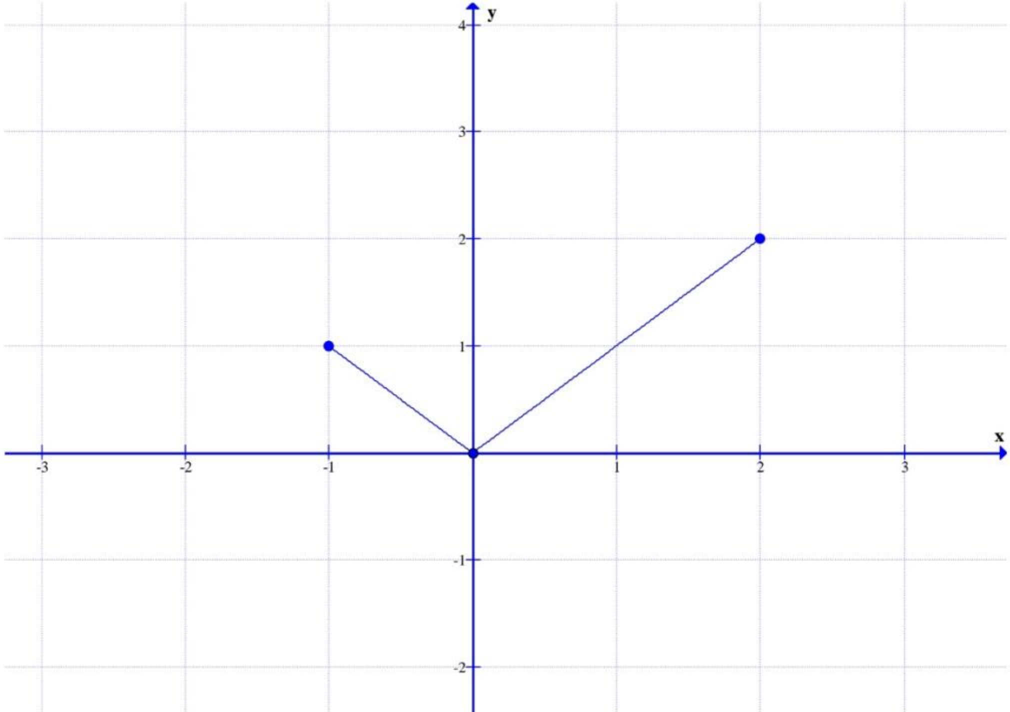
با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم.

۲ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال دهیم.

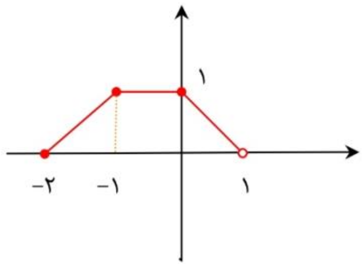
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x|$ را در فاصله‌ی $[-۱,۲]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=|x|+۳$ را رسم کنید. ب : نمودار تابع $h(x)=|x|-۱$ را رسم کنید.


y
4
3
2
1
-1
-2
x
-3
-2
-1
1
2
3

اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین منتقل می کنیم.

تمرین ۱ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=f(x)-۲$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

قسمت دوّم : انتقال افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. می تـوان انتقال افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اوّل : تابع g به صورت $g(x)=f(x+k)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(x_\circ - k) = f(x_\circ - k + k) = f(x_\circ)$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ - k, y_\circ)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار f است.

حالت دوّم : تابع g به صورت $g(x)=f(x-k)$ تعریف شده باشد.آنگاه

$$g(x_\circ + k) = f(x_\circ + k - k) = f(x_\circ)$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ + k, y_\circ)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ انتقال دهیم.

۲ : برای رسم نمودار تابع $y=f(x-k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت راست انتقال دهیم.

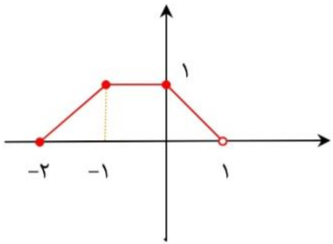
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=(x+۳)^۲$ را رسم کنید.

ب : نمودار تابع $h(x)=(x-۲)^۲$ را رسم کنید.

نتیجه: در انتقال افقی عرض نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می مانند و فقط طول آنها به اندازه‌ی k واحد اضافه یا کم می شود.

تمرین ۲ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x) = f(x-۲)$ را رسم کنید.

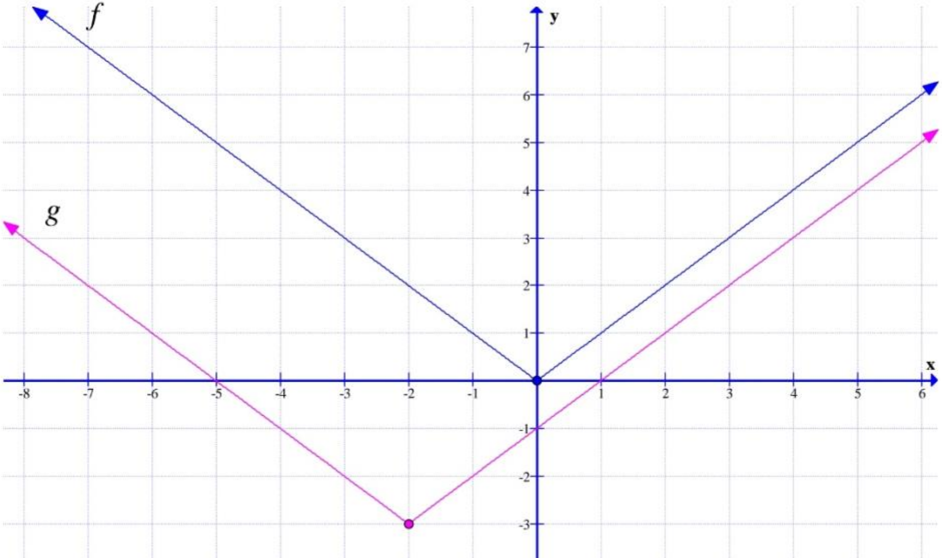
ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

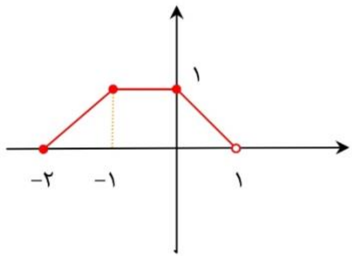
توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی داشته باشیم[۱]. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : برای رسم نمودار تابع $g(x) = |x+۲|-۳$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد در راستای افقی به

مثال : برای رسم نمودار تابع $g(x) = |x+2| - 3$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ و سپس سه واحد در راستای قائم به سمت پایین منتقل می کنیم.



تمرین ۳ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x) = f(x-۲)+۱$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

تمرین۴ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و سپس به کمک آن نمـودار توابع زیر را نیز رسم نمایید.

الف) $g(x)=\sin x+۲$ ب) $h(x)=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ج) $k(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۲})+۱$

ب : انبساط و انقباض عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و (x_0 , y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می توان انبساط و انقباض عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد،آنگاه

$$g(x_0) = kf(x_0) = ky_0$$

بنابر این نقطه‌ی (x_0 , ky_0) از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0 , y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را k برابر کنیم ولی طول نقـاط را ثابت نگه داریم.

مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در فاصله‌ی $[0,4]$ را رسم کنید. سپس بـه کمـک آن هـر یـک از

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را k برابر کنیم ولی طول نقـاط را ثابت نگه داریم.

مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در فاصله‌ی $[۰,۴]$ را رسم کنید. سپس بـه کمـک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x) = ۳\sqrt{x}$ را رسم کنید.

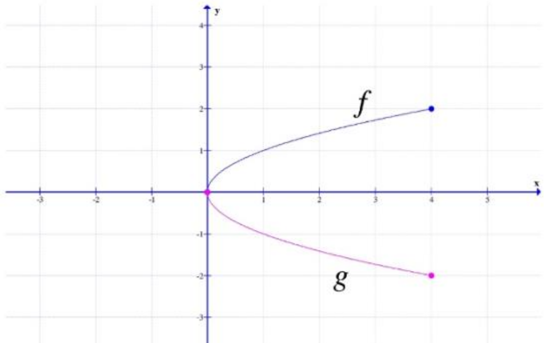
ب : نمودار تابع $h(x) = \frac{۱}{۲}\sqrt{x}$ را رسم کنید.

۱ : اگر $k > 1$ باشد. نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۲ : اگر $0 < k < 1$ باشد. نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۳ : اگر عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = -f(x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = -\sqrt{x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۵ : نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=۲\cos x$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

ج : انبساط و انقباض افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می تـوان انبساط و انقباض افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(\frac{1}{k}x_\circ) = f(\frac{1}{k} \times kx_\circ) = f(x_\circ)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{1}{k}x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار f است.

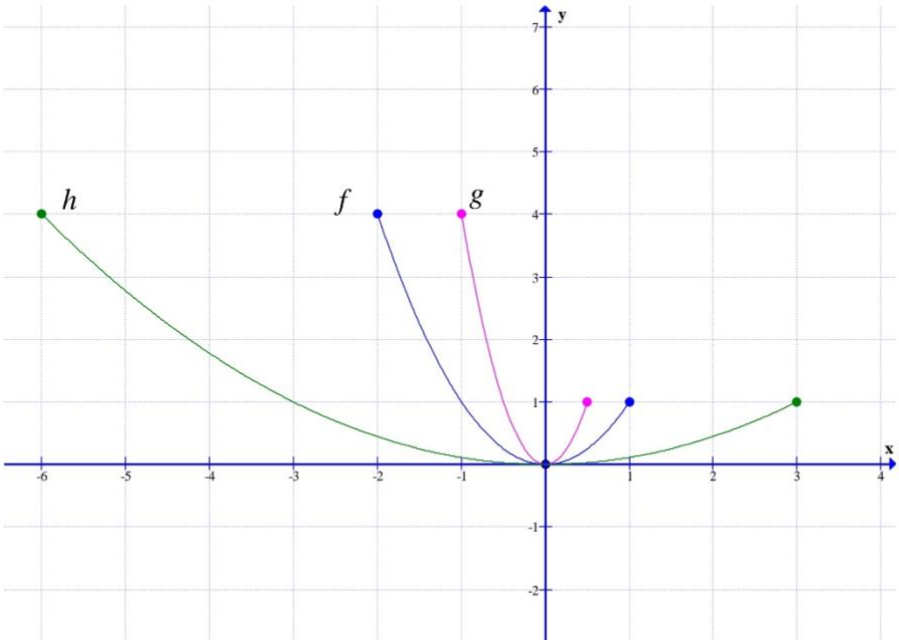
با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته ، ولی طـول نقاط را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^{۲}$ را در فاصله‌ی $[-۲,۱]$ را رسم کنید. سپس بـه کمـک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x) = (۲x)^{۲}$ را رسم کنید.

ب : نمودار تابع $h(x) = (\frac{۱}{۳}x)^{۲}$ را رسم کنید.

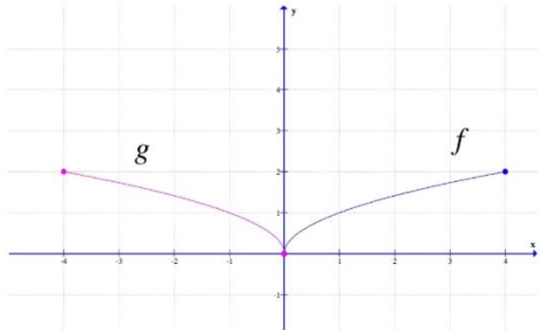

y
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
x
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
h
f
g

۱ : اگر $k > ۱$ باشد. نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۲ : اگر $۰ < k < ۱$ باشد. نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۳ : اگر طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = f(-x)$ بـه دسـت مـی آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۶ : نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=\sin 2x$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

توجه : برای رسم نمودار تابعی نظیر $g(x)=۳f(\frac{۵x+۳}{۴})+۵$ به کمک نمودار تابع $f(x)$ می توان از **ترفند تغییر متغیر** نیز استفاده کنید. این ترفند برای تعیین نقاط g به کمک نقاط متناظر آنها در f بکـار می رود. بدین ترتیب که :

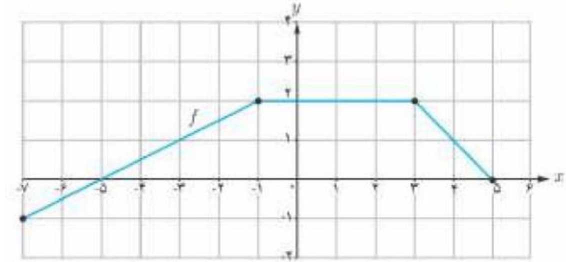
الف : عرض نقاط f را ابتدا سه برابر و سپس ۵ واحد اضافه می کنیم.

ب : عبارت $\frac{۵x+۳}{۴}$ را برابر t قرار می دهیم و x را محاسبه می کنیم.

$$\frac{۵x+۳}{۴}=t \to ۵x+۳=۴t \to x=\frac{۴t-۳}{۵}$$

یعنی طول نقاط f را ابتدا ۴ برابر کرده و سپس ۳ واحد اضافه می کنیم و در نهایت بر ۵ تقسیم می کنیم.

تمرین ۷ : اگر نمودار تابع f به مقابل باشد. نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $g(x) = f(۲x + ۱)$

ب) $h(x) = f(۲x) - ۳$

ج) $k(x) = ۲f(x) - ۱$

تابع جدید	نحوه‌ی تبدیل		نتیجه	
$y = f(x) + k$	به عرض نقاط k واحد اضافه می شود.	طول نقاط ثابت می ماند.	نمودار به اندازه‌ی k واحد بالا می رود.	مطیع
$y = f(x) - k$	از عرض نقاط k واحد کم می شود.		نمودار به اندازه‌ی k واحد پایین می رود.	
$y = kf(x)$	عرض نقاط در k ضرب می شود.		اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت عمودی منقبض می شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت عمودی منبسط می شود.	
$y = f(x + k)$	از طول نقاط k واحد کم می شود.	عرض نقاط ثابت می ماند.	نمودار به اندازه‌ی k واحد به عقب می رود.	لجباز
$y = f(x - k)$	به طول نقاط k واحد اضافه می شود.		نمودار به اندازه‌ی k واحد به جلو می رود.	
$y = f(kx)$	طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می شود.		اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت افقی منبسط می شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت افقی منقبض می شود.	

۹ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

۹-۲) $g(x)=۲+\sqrt{x-۱}$

۹-۲) $g(x)=\sqrt{۲+x}$

۹-۲) $g(x)=\sqrt{۱-x}$

۹-۲) $g(x)=۲+\sqrt{x}$

۹-۲) $g(x)=\sqrt{۲x+۱}-۳$

۹-۲) $g(x)=-۲\sqrt{x}$

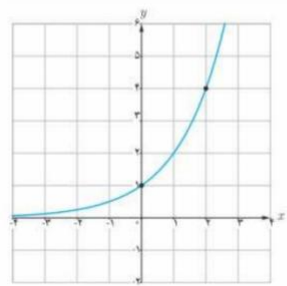
۱۰ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید. سپس بـه کمـک تبـدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

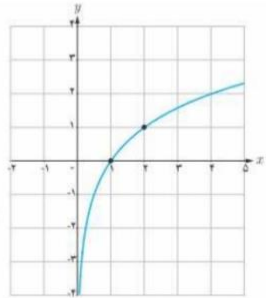
ب) $h(x)=۲\cos\frac{x}{۳}$

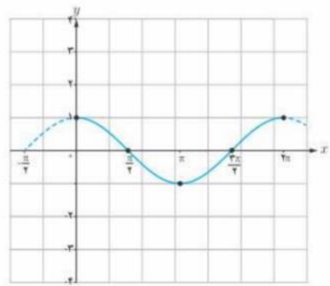
الف) $g(x)=\cos ۲x-۱$

۱۱: در زیر نمودار توابع $y = 2^{x}$ و $y = \log_{2}^{x}$ و $y = \cos x$ رسم شده اند. نمودار توابع زیر را به کمک تبدیلات رسم کنید.

الف) $y = 2^{x-1} + 2$ ب) $y = \log_{2}^{x+2}$ ج) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

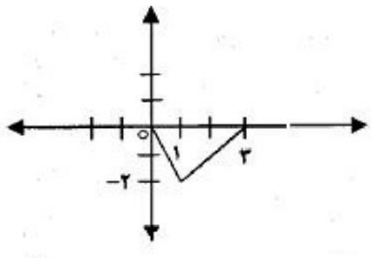






۱۲ : در زیر نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از تبدیلات، سپس نمودار تابع $y = -2f(x-3)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۲ : در زیـر نمـودار تـابع $y = f(x)$ رسـم شـده اسـت. بـا اسـتفاده از تبـدیلات، سـپس نمـودار تابع $y = -۲f(x-۳)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۱۳ : تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-۲,۱]$ و برد $[۱,۵]$ را در نظر بگیرید. به کمک ویژگی های تبدیلات، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $g(x) = ۲f(x-۱) - ۳$

ب) $h(x) = f(\frac{۱}{۲}x) + ۱$