حسابان یک

فصل ۱ درس ۲

امیرحسین اژرکوی

درس دوم : معادلات درجه دوم

تجزیه

اتحاد

Δ

ریشه گیری

جمع بندی : $y = ax^2 + bx + c$

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+\cancel{4}ac}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}}$$

روابط بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم :

معادله

سال قبل دیدیم که فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ جواب های زیر رو به ما داد :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\sqrt{\Delta} > 0$, $\Delta = 0 \rightarrow$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta < 0$ ×

$$x_1 + x_2 = \frac{-\cancel{2}b+0}{\cancel{2}a} = -\frac{b}{a}$$

S

حالا با جمع و ضرب و تفریق کردن این جواب ها رابطه ای بین ریشه های معادله درجه دوم و ضرایب معادله پیدا کنید :

$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}$

حاصل جمع

$x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a}$

حاصل ضرب ریشه ها

$\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

$(1+\alpha)(1+\beta)=1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$1+S+P$

تمرین : اگر α,β ریشه های معادله $x^2-2x-4=0$ باشد مقدار $\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\alpha+1}$ را بیابید .

$\beta+1 \quad \alpha+1$

$\frac{S+2}{1+\underset{2}{S}+\underset{-4}{P}}=\frac{2+2}{1+2+(-4)}=\frac{4}{-1}=-4$

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-2)}{1}$

$P=\frac{c}{a}$

تمرین : در معادله $x^2-6x+3=0$ مقدار $x_1^2+x_2^2$ را بدست آورید . (توجه : $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$)

$S-2P=6-6=0$ حاصل مجذور مجموع ریشه ها

$(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2=(\underbrace{x_1+x_2}_{S})^2-\underbrace{2x_1x_2}_{P}$

$x_1+x_2=S=-\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2=P=\frac{c}{a}$

$x^2-Sx+P=0$

مزدوج / مربع

تمرین : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $3-2\sqrt{5}$ و $3+2\sqrt{5}$ باشد .

x_1 ، x_2

$S=3+\cancel{2\sqrt{5}}+3-\cancel{2\sqrt{5}}=6$

$P=(3+2\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})=9-20=-11$

اتحاد مزدوج

$(2\sqrt{5})^2=4\times5=20$

$x^2-6x-11=0$

تمرین : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن نصف ریشه های معادله $x^2-3x-5=0$ باشد .

$\Delta=9-4(1)(-5)=9+20=29$

$\rightarrow \frac{3+\sqrt{29}}{2}\times\frac{1}{2}$ و $\frac{3-\sqrt{29}}{2}\times\frac{1}{2}$ $\rightarrow \frac{3+\sqrt{29}}{4}$ و $\frac{3-\sqrt{29}}{4}$

قانون!

$S=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$P=\frac{9-29}{16}=\frac{-20}{16}=-\frac{5}{4}$

$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}=0$

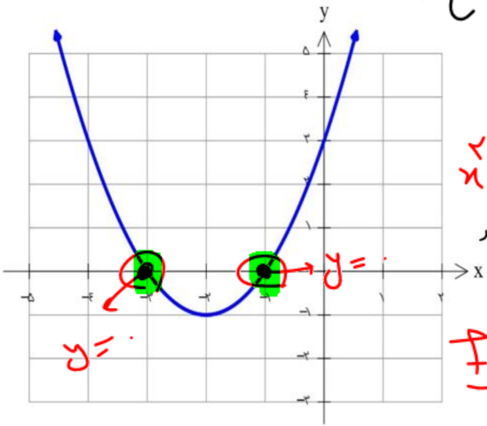
$4x^2-6x-5=0$

تمرین : محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب ۳۸ و ۸۴ است . طول و عرض آن را بیابید .

x_1 و x_2

محل برخورد تابع با محورها

صفر های تابع : ریشه‌ها



نمودار تابع $f(x)=x^2+4x+3$ در شکل روبرو رسم شده است .

الف) معادله $f(x)=0$ را حل کنید .

$x^2+4x+3=0$

ب)چه رابطه ای بین ریشه های معادله قبل و محل تلاقی تابع با محور طول ها وجود دارد ؟

$f(x)=0$

$(x+3)(x+1)$

$-3 \qquad -1$

x

برای هر تابع f جواب های معادله $f(x)=0$ رو در صورت وجود ، صفر های تابع f می گن و از نظر هندسی محل برخورد نمودار تابع با محور x ها ست .

$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}=C$

$\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$ $\quad 4=36a+6b-3$

$y=ax^2+bx+C$

$36a+6b=7$

$6(6a+b)=7$

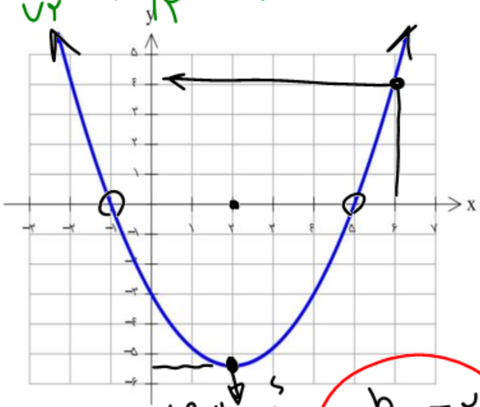
$6(b+b)=7$

$6(2b)=7$

$2b=\frac{7}{6}$

$y=\frac{7}{72}x^2+\frac{7}{12}x-3$

تمرین : اگر نمودار سهمی f به صورت زیر باشد . ضابطه سهمی را بنویسید .



راس سهمی $=\frac{-b}{2a}=2$

$0=a-b-3 \Rightarrow a-b=3$ ✓

$0=25a-5b-3 \Rightarrow 25a-5b=3$

$15(5a-b)=3$

$a-b=25a-5b$

$24a=4b$

$6a=b$ ✓

$6a=\frac{7}{12}$

$b=\frac{7}{12},\ a=\frac{7}{72}$

$C=-3$

$a=\frac{7}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{72}$

$x^4=(x^2)^2=(t)^2$

تغییر متغیر

$x^2=t$

$f(x)=0$

تمرین : تمام صفر های تابع $f(x)=x^4-10x^2+16$ را بیابید .

$(x^2)^2-10x^2+16 \longrightarrow t^2-10t+16=0$

$(t-8)(t-2)=0$

$t=8$ یا $t=2$

$x^2=8 \rightarrow x=\pm\sqrt{8}$

$x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

تمرین : بدون حل معادله و فقط به کمک S,P,Δ تعداد و علامت صفر های توابع زیر را مشخص کنید .

$y=x^2-7x+12$

$\frac{7}{2}$

$\Delta=49-4(1)(12)=49-48=1$

$\Delta>0$ دو صفر جواب داریم

$S=7$

$P=12$

$y=2x^2-x-6$

$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}$

$\Delta=1-4(2)(-6)=49$

$\Delta>0$ دو تا صفر جواب دارد

$S=\frac{1}{2}$

$P=-3$

$y=x^2+x+1$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow 1-4(1)(1)=1-4=-3$

$\Delta<0$ صفر جواب ندارد

$S=-\frac{1}{1}=-1$

$P=1$

$$-\frac{(m-4)}{2} > 0 \qquad -(m-4) > 0$$

تمرین : به ازای چه مقادیری از m معادله $\underbrace{+}_{a}x^2 + \underbrace{(m-4)}_{b}x + \underbrace{2m+4}_{c} = 0$ دو ریشه مثبت دارد ؟

$\Delta > 0$

$P > 0$

$S > 0 \qquad -\frac{b}{a} = -\frac{(m-4)}{1} = -m+4 > 0 \longrightarrow m<4$

$-\frac{b}{2a} > 0 \qquad \frac{2m+4}{1} > 0 = 2m+4 > 0 \longrightarrow 2m > -4 \longrightarrow m > -2$

تشخیص علامت ضرایب ضابطه سهمی از روی نمودار آن :

سال قبل فهمیدیم که تو سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ علامت a بستگی به جهت بازوهای سهمی داره یعنی اگر بازو ها به سمت بالا باشن a مثبته و اگر به سمت پایین باشن a منفیه .

و از اونجایی که $f(0) = c$ هستش پس در واقع c محل برخورد تابع با محور عرض ها هستش پس می تونیم با نگاه کردن به محل بخورد تابع با محور عرض ها ، علامت c رو تشخیص بدیم .

$y=x^2-3$

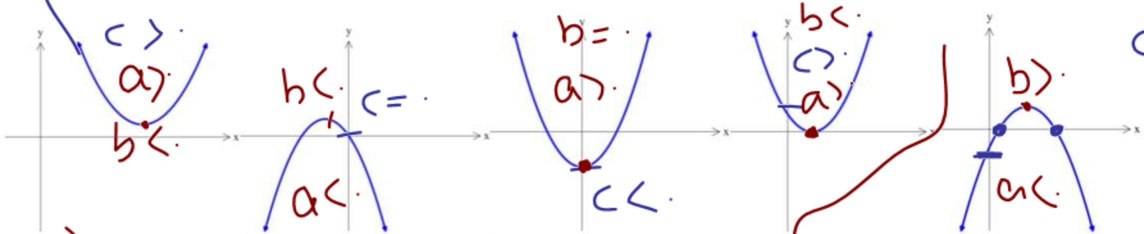
x^2+bx-3

ولی برای تشخیص علامت b میخوام که شما پیشنهاد خودتون رو بدید راهنمایی من به شما استفاده از طول راس سهمی هستش !!!

$-\frac{b}{2a}>0$ $\quad -b>0$ $\quad b<0$

تمرین : نمودار های زیر مربوط به تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند ، علامت ضرایب a,b,c را مشخص کنید .

$c<0$



$-\frac{b}{a}<0 \quad b<0$

$-\frac{b}{2a}=0 \quad b=0$

$-\frac{b}{2a}>0$

$-\frac{b}{2a}>0$

$\frac{b}{\text{کوهن}}>0$

تمرین : تعداد و مقدار ریشه های معادله های زیر را به روش هندسی بدست آورید .

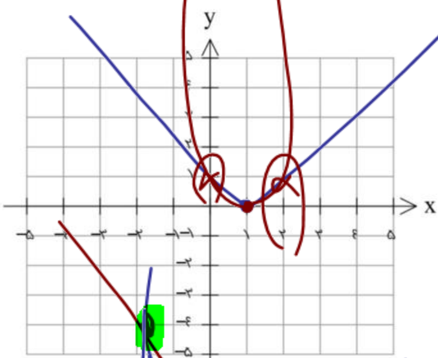
الف) $|x-1| = x^{2} - 2x + 1$

$(x-1)^2$

$|x-1| = (x-1)^2$

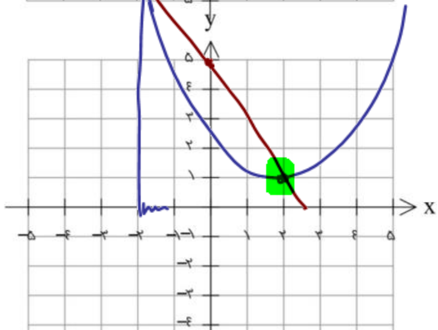
$1 = 1$

$1 = 1$



ب) $(x-2)^{2} + 1 = -2x + 5$

۱۷ -



ج) $-|x+1|+1=\frac{1}{3}x$