



# حسابان یک

فصل اول \_\_ درس ۱

امیرحسین اژرکوی

## دنباله حسابی (تصاعد عددی)

دنباله حسابی رشته ای از اعداد حقیقی است که هر جمله اش با افزودن عدد ثابتی به جمله ما قبش بوجود می آید .  
نمایش می دهند و داریم  $d$  این عدد ثابت را که مخالف صفر باشد، قدر نسبت دنباله حسابی می گوئیم و آن را با نماد  
:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots, a + (n - 1)d, \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ t_1, & t_2, & t_3, & \dots & t_n, & \dots & t_n, \dots \end{array}$$

ام دنباله حسابی می گویند.  $n$  را جمله عمومی یا جمله  $t_n$

در دنباله حسابی فرمول ها و روابط زیر برقرار است:

$$۱) d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$$

$$۲) t_n = t_1 + (n - 1)d = a + (n - 1)d$$

نکته: در دنباله حسابی با داشتن دو جمله از آن دنباله ، می توان قدر نسبت را بدست آوریم .  
 ( فرض کنید  $t_m$  و  $t_n$  دو جمله از یک دنباله حسابی باشند )

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

باشند، قدر نسبت دنباله ، جمله عمومی 7 و 22مثال: هر گاه جملات نهم و چهارم یک دنباله حسابی به ترتیب و جمله صدم این دنباله را بدست آورید .

سه 

---

 جمله متوالی (پشت سرهم) از یک دنباله حسابی باشند، بین این سه جمله رابطه زیر  $a$  و  $b$  و  $c$  نکته: اگر برقرار است:

$$b = \frac{a+c}{2} \text{ یا } a + c = 2b$$

می گویند  $a$  و  $c$  را واسطه حسابی دو عدد  $b$  در این حالت عدد

را بدست آورید.  $x$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، آنگاه مقدار  $x - 1$ ،  $2x + 1$ ،  $4x + 5$  مثال: اگر

، مجموع ، حاصل ضرب و تفاضل ریشه های معادله درجه دوم  $a$  مثال: به ازای چه مقداری از

تشکیل دنباله حسابی می دهند؟  $x^2 - (2a + 3)x + a = 0$

واسطه حسابی را درج کنیم (قرار دهیم) ، قدر نسبت دنباله حسابی از  $a$  ،  $m$  و  $b$  نکته: هرگاه بین دو عدد رابطه روبرو بدست می آید :

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

قرار داده و اعداد (رشته) حاصل تشکیل دنباله حسابی  $a$  و  $b$  عدد میگردیم تا آنها را بین  $m$  در واقع ما دنبال دهند .

، پنج واسطه حسابی درج کرده ایم ، قدر نسبت دنباله و واسطه ها را بدست آورید. 25 و 7 مثال: بین دو عدد



---

( دنباله صعودی و اگر قدر نسبت منفی باشد،  $d > 0$  نکته: در دنباله حسابی اگر قدر نسبت مثبت باشد، (یعنی  $d > 0$ ) دنباله نزولی است. (یعنی  $d < 0$ )

مجموع جملات دنباله حسابی

جمله اول دنباله از رابطه های زیر بدست می آید:  $n$  در یک دنباله حسابی، مجموع

در فرمول های روبرو:

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ S_n = \frac{n}{2} (t_1 + t_n) \end{cases}$$

جمله اول دنباله حساب  $n$ : مجموع

$S_n$ : تعداد جملاتی که قرار است با هم جمع شوند

$n$ .

: جمله اول دنباله  $a$  و  $t_1$

: جمله آخر دنباله داده شده  $t_n$ : قدر نسبت و  $d$

به کمک فرمول های گفته شده در بالا می توان به نتایج زیر در جمع اعداد طبیعی ، اعداد طبیعی فرد و اعداد طبیعی زوج رسید:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\text{عدد بعدیش} \times \text{آخرین عدد}}{2} \\ 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1) = (\text{نصف آخرین عدد} + 1) \times \text{نصف آخرین عدد} \\ 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2 = \left(\frac{\text{آخرین عدد} + 1}{2}\right)^2 \end{array} \right.$$


---

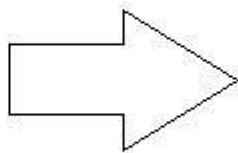
---

– را با هم جمع کنیم که حاصل آن مثبت شود؟  $16 -$  ،  $19 -$  ،  $22$  مثال : حداقل چند جمله اول دنباله ... ،

---

را داشته باشیم، می توانیم جمله عمومی دنباله حسابی را بدست آوریم:  $S_n$  نکته مهم: به طور کلی هرگاه فرمول

$$\begin{cases} s_1 = t_1 \\ s_2 = t_1 + t_2 \\ s_3 = t_1 + t_2 + t_3 \\ \vdots \\ s_{n-1} = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} \\ s_n = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n \end{cases}$$



$$\begin{cases} s_2 - s_1 = t_2 \\ s_3 - s_2 = t_3 \\ \vdots \\ s_n - s_{n-1} = t_n \end{cases}$$

جمله اول دنباله حسابی می توانیم با استفاده از رابطه زیر قدر نسبت دنباله  $n$  همچنین با داشتن رابطه مجموع را نیز محاسبه کنیم:

$$d = s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2}$$

---

بدست می آید. جمله عمومی و قدر  $S_n = n^2 + 2n$  جمله اول از رابطه  $n$  مثال : در یک دنباله حسابی مجموع نسبت این دنباله را بدست آورید .

## دنباله هندسی (تصاعد هندسی)

دنباله هندسی رشته ای از اعداد حقیقی است که هر جمله اش با ضرب شدن عدد ثابتی در جمله ما قبل خودش نشان  $q$  یا  $r$  بدست می آید. این عدد ثابت را که مخالف صفر می باشد، قدر نسبت دنباله می گویند و آن را با نماد  $q$  یا  $r$  نشان می دهند، پس داریم:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a & , & aq & , & aq^2 & , & \dots & , & aq^9 & , & \dots & , & aq^{n-1} & , & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 t_1 & , & t_2 & , & t_3 & , & \dots & & t_{10} & , & \dots & & t_n & , & \dots
 \end{array}$$

در دنباله هندسی روابط و فرمول های زیر برقرار است:

$$۱) q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

$$۲) t_n = t_1 q^{n-1} \text{ یا } t_n = a q^{n-1}$$

---

( را بدست آوریم:  $q$  در یک دنباله هندسی با داشتن دو جمله از دنباله می توانیم قدر نسبت دنباله )

دو جمله از یک دنباله هندسی هستند)  $t_n$  و  $t_m$ .



$$\left\{ \begin{array}{l} q = \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} \quad (\text{هرگاه } (m-n), \text{ فرد باشد}), \\ q = \pm \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} \quad (\text{هرگاه } (m-n), \text{ زوج باشد}), \end{array} \right.$$

مثال : هرگاه جملات سوم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب  $\frac{81}{4}$  و  $\frac{1}{4}$  باشد، قدر نسبت را بدست آورید .

تشکیل

دنباله هندسی دهند ( یا سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند)  $a$  و  $b$  و  $c$  نکته: شرط اینکه سه عدد عبارت است از :

$$b = \pm \sqrt{ac} \text{ یا } ac = b^2$$

می گویند  $a$  و  $c$  را واسطه هندسی دو عدد  $b$  در این حالت عدد

مثال: واسطه هندسی اعداد  $\sqrt{\frac{3}{4}}$  و  $\sqrt{3}$  را بدست آورید .

واسطه هندسی درج کنیم (قرار دهیم) ، قدر نسبت دنباله تشکیل شده از  $a$  ،  $m$  و  $b$  نکته: هرگاه بین دو عدد روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} & \text{اگر } (m+1) \text{ فرد باشد،} \\ q = \pm \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} & \text{اگر } (m+1) \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

، سه واسطه هندسی درج کنید ، آیا جواب یکتا است؟ 48 و 3 مثال : بین دو عدد

## مجموع جملات دنباله هندسی

از رابطه زیر بدست می آید:  $a$  و جمله اول  $q$  جمله اول دنباله با قدر نسبت  $n$  در هر دنباله هندسی مجموع

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{یا} \quad S_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}), \quad (q \neq 1)$$

می شود؟ 1456 برابر 108 ، 36 ، 12 ، 4 مثال : مجموع چند جمله اول دنباله هندسی ... ،

است.

چند جمله از این دنباله ها را با هم جمع کنیم تا  $a_n = 2^{n-1}$  مثال : جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت شود؟  
255 حاصل مجموع آنها

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

---

است، قدر 126 و مجموع شش جمله اول برابر 112 مثال : در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر نسبت این دنباله هندسی را بدست آورید .

---

اگر  $|q| < 1$  باشد و تعداد جملات دنباله هندسی نامتناهی (نامحدود) باشد ، آنها مجموع تمامی جملات  $|q| < 1$  نکته مهم : اگر

دنباله که به آن حد مجموع گفته می شود از رابطه زیر بدست می آید :

$$S_{\infty} = S = \frac{a}{1 - q}$$

† در فرمول روبرو ،  $a$  جمله اول و  $q$  قدر نسبت می باشد.

†  $S$  : مجموع تمامی جملات دنباله هندسی یا حد مجموع می باشد.

مثال : حاصل تقریبی جمع  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  را بدست آورید .

$\infty$